آزمون جامع «۱»

۱. گزینه‌ی (۴)

با استفاده از اتحاد مزدوج عبارت‌های صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم و سپس از بسط $\sin(\alpha\pm\beta)$ و $\cos(\alpha\pm\beta)$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$=\frac{(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}{(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)}$$

$$=\frac{\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}=\cot(\alpha-\beta)\cot(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=135\Rightarrow\tan(\alpha+\beta)=\tan 135^\circ\\ =\tan(180-45)=-1\\ \tan(\alpha-\beta)=\frac{3}{4}\end{cases}$$

$$=\frac{1}{\tan(\alpha-\beta)}\times\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\frac{3}{4}}\times\frac{1}{-1}=\frac{-4}{3}$$

۲. گزینه‌ی (۲)

$$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0$$

$$\sin 2x(2\cos x+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\\ 2\cos x+1=0\Rightarrow\cos x=\frac{-1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

با توجه به فرض: غ ق ق

۳. گزینه‌ی (۴)

می‌دانیم: $2\sin x\cos x=\sin 2x$

$$\Rightarrow 2+\sin x\cos x=2+\frac{1}{2}\sin 2x$$

با توجه به حدود $\sin A$ و $\cos A$ داریم:

$$-1\le\sin A\le 1\Rightarrow -1\le\sin 2x\le 1\Rightarrow\frac{-1}{2}\le\frac{1}{2}\sin 2x\le\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{2}\le 2+\frac{1}{2}\sin 2x\le\frac{5}{2}\Rightarrow\begin{cases}\text{کم‌ترین مقدار}:\frac{3}{2}\\ \text{بیشترین مقدار}:\frac{5}{2}\end{cases}$$

۴. گزینه‌ی (۲)

$$\sin x\cos 6x=1-\sin 6x\cos x$$

$$\sin x\cos 6x+\sin 6x\cos x=1$$

بسط

$$\sin(x+6x)=1\Rightarrow\sin 7x=1\Rightarrow 7x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$x=\frac{2k\pi}{7}+\frac{\pi}{14}\xrightarrow{k=1}\frac{2\pi}{7}+\frac{\pi}{14}=\frac{5\pi}{14}$$

۵. گزینه‌ی (۱)

ابتدا باید به گونه‌ای زاویه‌ی $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را به هم ربط دهیم. می‌دانیم:

$$\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

$$\sin\frac{A}{3}=\cos B\Rightarrow\sin\frac{A}{3}=\sin(\frac{\pi}{2}-B)\Rightarrow\frac{A}{3}=\frac{\pi}{2}-B$$

$$\Rightarrow A+3B=\overset{180^\circ}{\overset{\uparrow}{\frac{3\pi}{2}}}=270^\circ\quad ①$$

از طرفی: $\hat{C}=60^\circ\Rightarrow\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180\Rightarrow\hat{A}+\hat{B}=120^\circ\quad ②$

① و ② $\Rightarrow\hat{B}=75^\circ\quad\hat{A}=45^\circ$

۶. گزینه‌ی (۱)

$$2\sin^2 a+\sin a\cos a(\cot a-\tan a)=?$$

$$2\sin^2 a+\underbrace{\sin a\cos a}_{\times\ \times}(\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\sin a}{\cos a})=2\sin^2 a+\cos^2 a-\sin^2 a$$

$$=\sin^2 a+\cos^2 a=1$$

۷. گزینه‌ی (۴)

طرفین رابطه‌ی داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sin x-\cos x=\frac{\sqrt{5}}{7}\Rightarrow\underbrace{\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x}_{1}=\frac{5}{49}$$

$$\Rightarrow 1-\underbrace{2\sin x\cos x}=\frac{5}{49}\Rightarrow 1-\sin 2x=\frac{5}{49}$$

$$\Rightarrow\sin 2x=1-\frac{5}{49}=\frac{44}{49}$$

۸. گزینه‌ی (۴)

می‌دانیم: $2\sin a\cos a=\sin 2a$

بنابراین می‌توانیم $2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}$ را به صورت $\sin\frac{2\pi}{7}$ بنویسیم:

$$\Rightarrow\frac{\underbrace{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\overbrace{\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}^{\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{7}}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\frac{1}{4}\sin\frac{8\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

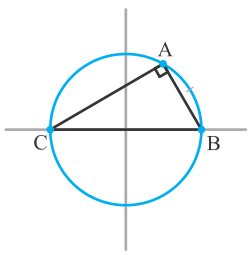
$$=\frac{\frac{1}{4}\sin(\frac{7\pi+\pi}{7})}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\frac{1}{4}\sin(\pi+\frac{\pi}{7})}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\frac{1}{4}\times-\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-1}{4}$$

۹. گزینه‌ی (۱)

$$\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x\Rightarrow\sin 2x+\cos(\frac{\pi}{2}+x)=0$$

$$\Rightarrow\sin 2x-\sin x=0\Rightarrow 2\sin x\cos x-\sin x=0$$

$$\Rightarrow\sin x(2\cos x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\to x=0\quad x=\pi\\ 2\cos x-1=0\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}\\ \to x=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$



قائم‌الزاویه: $\overset{\Delta}{ABC}$

۱۰. گزینه‌ی (۲)

$$\begin{cases}\cos(3x+\frac{3\pi}{2})=\sin 2x\\ \cos(\frac{3\pi}{2}+3x)=\sin 3x\end{cases}\Rightarrow \sin 3x=\sin 2x\rightarrow$$

می‌دانیم: $\sin x=\sin\alpha\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\alpha\\ x=2k\pi+\pi-\alpha\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x=2k\pi+2x\Rightarrow x=2k\pi \quad \text{غ ق ق}\\ 3x=2k\pi+\pi-2x\Rightarrow 5x=2k\pi+\pi\end{cases}$$

$$\begin{cases}k=0\rightarrow x=\frac{\pi}{5}\\ k=1\rightarrow x=\frac{3\pi}{5}\end{cases}\Rightarrow\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}=\frac{4\pi}{5}$$

۱۱. گزینه‌ی (۱)

$$\tan 35^\circ=2a-1$$

$$\frac{\sin(145)-\sin(235)}{\cos 325}=\frac{\sin(180-35)-\sin(270-35)}{\cos(360-35)}$$

$$=\frac{\sin 35-(-\cos 35)}{\cos 35}=\frac{\sin 35+\cos 35}{\cos 35}\xrightarrow{\text{تفکیک می‌کنیم}}$$

$$\tan 35+1=2a-1+1=2a$$

۱۲. گزینه‌ی (۴)

روش اول اولاً می‌توانیم از عددهی استفاده کنیم. اگر $x=0$ را در رابطه‌ی مقابل قرار دهیم صدق می‌کند:

$$3\cos x+\sqrt{3}\sin x=3$$

و $\cos(x-\frac{\pi}{6})=\cos(-\frac{\pi}{6})$ که $\cos(-\frac{\pi}{6})$ با $\cos\frac{\pi}{6}$ برابر است و برابر است با: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

روش دوم

$$3\cos x+\sqrt{3}\sin x=3$$

$$\cancel{3}(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin x)=\cancel{3}\Rightarrow\cos x+\tan\frac{\pi}{6}\sin x=1$$

$$\cos x+\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\sin x=1\xrightarrow{\text{طرفین}\times\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$\underbrace{\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\sin x}_{\cos(x-\frac{\pi}{6})}=\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\cos(x-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۳. گزینه‌ی (۱)

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x+\sin 2x\cos x$$

نکته: $\frac{1+\cos 2x}{2}=\cos^2 x\Rightarrow 1+\cos 2x=2\cos^2 x$

$$2\cos^2 x=2\cos^2 x+\sin 2x\cos x\Rightarrow\sin 2x\cos x=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2} & ①\\ \cos x=0\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2} & ②\end{cases}$$

$$\xrightarrow{①\cap②}=\{\frac{k\pi}{2}\}$$

۱۴. گزینه‌ی (۴)

$$(1+\tan^2 x)\cos^2(\frac{\pi}{2}+x)=1$$

$$\begin{cases}1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\\ \cos^2(\frac{\pi}{2}+x)=\sin^2 x\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{\cos^2 x}\times\sin^2 x=1$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}\tan^2 x=1\\ \tan x=\pm 1\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}\end{matrix}$$

۱۵. گزینه‌ی (۱)

روش اول

$$(\frac{1}{\cos x}-1)(1+\frac{1}{\cos x})=1\Rightarrow\frac{1}{\cos^2 x}-1=1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\cos^2 x}=2\Rightarrow\cos^2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

روش دوم

$$(\frac{1-\cos x}{\cos x})(\frac{1+\cos x}{\cos x})=1\Rightarrow\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1$$

$$\Rightarrow\tan^2 x=1\Rightarrow\tan x=\pm 1\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

۱۶. گزینه‌ی (۳)

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}$$

می‌دانیم: $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

$$\Rightarrow\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\times\tan\alpha}\Rightarrow\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$$

از طرفی: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

$$=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\frac{16}{25}}=\frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow\tan^2\alpha=\frac{9}{16}\Rightarrow\tan\alpha=+\frac{3}{4}\quad\text{غ ق ق}$$

$$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$$

$$\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}}=\frac{1}{7}$$

نکته: توجه کنید که چون گفته شده α منفرجه است در ناحیه‌ی اول نیستیم و چون $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ و در نتیجه $\sin\alpha$ مثبت است در ناحیه‌ی دوم مثلثاتی قرار داریم و باید $\tan\alpha$ منفی باشد.

۱۷. گزینه‌ی (۴)

$$\cos^۲ x + ۳\sin(\frac{\pi}{۲}+x) + ۲ = ۰$$

$$\cos^۲ x + ۳\cos x + ۲ = ۰ \to \cos x = A \Rightarrow A^۲ + ۳A + ۲ = ۰$$

$$A = -۱ \Rightarrow \cos x = -۱ \Rightarrow x = (۲k+۱)\pi$$

$$A = -۲ \Rightarrow \cos x = -۲$$

(چون $\cos x$ همواره عددی بین ۱- و ۱ است) غیرقابل قبول

۱۸. گزینه‌ی (۲)

$$۲\tan x \cos^۲ x = ۱$$

$$۲\frac{\sin x}{\cos x} \times \cos^۲ x = ۱ \Rightarrow ۲\sin x \cos x = ۱ \Rightarrow \sin ۲x = ۱$$

$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

۱۹. گزینه‌ی (۳)

$$\sin^۲ ۲x = \frac{۳}{۵} \quad , \quad ۰ < x < \frac{\pi}{۴}$$

$$\sin^۲ ۲x + \cos^۲ ۲x = ۱ \Rightarrow \cos^۲ ۲x = ۱ - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \cos ۲x = \frac{۴}{۵}$$

$$\cos x \cos ۳x(\tan x + \tan ۳x)$$

$$= \cos x \cos ۳x(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin ۳x}{\cos ۳x})$$

$$= \cos x \cos ۳x(\frac{\sin x \cos ۳x + \sin ۳x \cos x}{\cos x \cos ۳x})$$

$$= \sin x \cos ۳x + \sin ۳x \cos x = \sin(x+۳x) = \sin ۴x$$

$$= ۲\sin ۲x \cos ۲x = ۲ \times \frac{۳}{۵} \times \frac{۴}{۵} = \frac{۲۴}{۲۵}$$

نکته: دقت کنید که $۰ < x < \frac{\pi}{۴}$ است و در نتیجه $۰ < ۲x < \frac{\pi}{۲}$ است. $۲x$ در ناحیه‌ی اول مثلثاتی قرار دارد، بنابراین $\cos ۲x = +\frac{۴}{۵}$ است.

۲۰. گزینه‌ی (۳)

$$\sin x = \frac{۳}{۵} \quad , \quad ۰ < x < \frac{\pi}{۲}$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲} + ۲x) = -\cot ۲x$$

$$\sin x = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \cos x = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \sin ۲x = ۲\sin x \cos x$$

$$= ۲ \times \frac{۳}{۵} \times \frac{۴}{۵} = \frac{۲۴}{۲۵}$$

$$۱ + \cot^۲ ۲x = \frac{۱}{\sin^۲ ۲x} \Rightarrow ۱ + \cot^۲ ۲x = \frac{۱}{(\frac{۲۴}{۲۵})^۲} = \frac{۶۲۵}{۵۷۶}$$

$$\Rightarrow \cot^۲ ۲x = \frac{۴۹}{۵۷۶} \Rightarrow \cot ۲x = +\frac{۷}{۲۴} \Rightarrow -\cot ۲x = -\frac{۷}{۲۴}$$

آزمون جامع «۲»

۱. گزینه‌ی (۱)

کافی است عبارت $۲\cos^۲ x$ را باز کرده و به صورت $\cos^۲ x + \cos^۲ x$ بنویسیم:

$$\sin^۲ x + \cos^۲ x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \underbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}_{۱} + \cos^۲ x = \frac{۳}{۲}$$

$$۱ + \cos^۲ x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۳}{۲} - ۱ = \frac{۱}{۲}$$

$$۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲ \Rightarrow \tan^۲ x = ۱$$

۲. گزینه‌ی (۱)

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\cos x \sin x}$$

$$\frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x} = \frac{۲}{\sin ۲x}$$

$$\frac{۲}{\sin ۲x} = \sqrt{۳} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{۲}{\sqrt{۳}} > ۱$$ غیرقابل قبول

زیرا همواره: $-۱ \le \sin A \le ۱$

۳. گزینه‌ی (۴)

باید کمان‌های نسبت‌های مثلثاتی را به گونه‌ای تفکیک کنیم که بتوان به کمک زوایای اصلی آن‌ها را ساده‌تر نوشت:

$$\sin\frac{۵\pi}{۴} + \sin(۸\pi - \frac{\pi}{۴}) + \sin\frac{۳\pi}{۴} + \sin\frac{۹\pi}{۴}$$

$$= \sin(\pi + \frac{\pi}{۴}) + \sin(۸\pi - \frac{\pi}{۴}) + \sin(\pi - \frac{\pi}{۴}) + \sin(۲\pi + \frac{\pi}{۴})$$

$$= -\sin\frac{\pi}{۴} - \sin\frac{\pi}{۴} + \sin\frac{\pi}{۴} + \sin\frac{\pi}{۴} = ۰$$

۴. گزینه‌ی (۴)

$$\frac{۱}{\cos^۴ x} + \frac{A}{\cos^۲ x} = \tan^۴ x - ۱ \Rightarrow \frac{۱ + A\cos^۲ x}{\cos^۴ x} = \frac{\sin^۴ x}{\cos^۴ x} - ۱$$

$$= \frac{\sin^۴ x - \cos^۴ x}{\cos^۴ x}$$

$$\Rightarrow ۱ + A\cos^۲ x = \sin^۴ x - \cos^۴ x \xrightarrow{\text{به کمک اتحاد مزدوج}}$$

$$= (\sin^۲ x - \cos^۲ x)(\underbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}_{۱})$$

$$\Rightarrow ۱ + A\cos^۲ x = \sin^۲ x - \cos^۲ x$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\sin^۲ x} + \cos^۲ x + A\cos^۲ x = \cancel{\sin^۲ x} - \cos^۲ x$$

$$\Rightarrow ۲\cos^۲ x + A\cos^۲ x = ۰ \Rightarrow \cos^۲ x(۲ + A) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 0 \\ 2 + A = 0 \Rightarrow A = -2 \end{cases}$$

۵. گزینه‌ی (۱)

به کمک دستگاه دو معادله دو مجهول $\sin x$ و $\cos x$ را برحسب a و b به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = a \\ \sin x - \cos x = b \end{cases}$$

$$2\sin x = a + b \Rightarrow \sin x = \frac{a+b}{2}$$

$$\cos x = a - \sin x = a - \frac{a+b}{2} = \frac{2a - a - b}{2} = \frac{a-b}{2}$$

$$\begin{cases} \tan(x - \frac{\pi}{4}) = \dfrac{\tan x - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1} \\ \xrightarrow[\tan x = \frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{a-b}{2}} = \frac{a+b}{a-b}]{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}} = \dfrac{\frac{a+b}{a-b} - 1}{\frac{a+b}{a-b} + 1} \\ \tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} == \dfrac{\frac{a+b-a+b}{a-b}}{\frac{a+b+a-b}{a-b}} = \dfrac{2b}{2a} = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

۶. گزینه‌ی (۱)

$$8\sin x\cos x(1 - 2\cos^2 x)$$

$$8 \times \frac{1}{2}\sin 2x \times (-\cos 2x) = -4\sin 2x\cos 2x = -4 \times \frac{1}{2}\sin 4x$$

$$= -2\sin 4x \xrightarrow{x = \frac{7\pi}{24}} -2\sin(4 \times \frac{7\pi}{24}) = -2\sin(\frac{7\pi}{6})$$

$$= -2\sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -2 \times -\frac{1}{2} = 1$$

۷. گزینه‌ی (۲)

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{\sin 3x\sin 2x - \cos 3x\cos 2x}^{-\cos(3x+2x)}}{\cos 3x\sin 2x}$$

$$\Rightarrow -\cos 5x = 0 \Rightarrow \cos 5x = 0 \Rightarrow 5x = k\pi + \frac{\pi}{2} \to x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\xrightarrow{k=4} x = \frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$$

۸. گزینه‌ی (۱)

$$1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x + \sin 2x$$

می‌دانیم: $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$

$$\Rightarrow \cancel{2\cos^2 2x} = \cancel{2\cos^2 2x} + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

۹. گزینه‌ی (۴)

$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{10}}{10}$ ناحیه‌ی سوم α

$$\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha + \frac{1}{10} = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{10}} \xrightarrow{\text{ناحیه‌ی سوم}} \sin\alpha = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\frac{9}{10}} \Rightarrow 1 + \cot^2\alpha = \frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow \cot^2\alpha = \frac{1}{9} \xrightarrow{\text{ناحیه‌ی سوم}} \cot\alpha = \frac{1}{3}$$

۱۰. گزینه‌ی (۴)

$$\sin^2 2\alpha(2 + \tan^2\alpha + \cot^2\alpha)$$

$$\sin^2 2\alpha(1 + \tan^2\alpha + 1 + \cot^2\alpha) = \sin^2 2\alpha(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha})$$

$$= \frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha$$

$$= 4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4$$

۱۱. گزینه‌ی (۲)

ابتدا بین عوامل داخل پرانتز مخرج مشترک گرفته و سپس به جای $\cot 20$ عبارت $\frac{\cos 20}{\sin 20}$ را قرار می‌دهیم:

$$2\cot 10^\circ(\frac{1}{\sin 20^\circ} - \cot 20^\circ)$$

$$2\cot 10(\frac{1 - \cot 20^\circ\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}) = 2\cot 10^\circ(\frac{1 - \frac{\cos 20}{\sin 20} \times \sin 20}{\sin 20^\circ})$$

$$= 2\cot 10(\frac{1 - \cos 20}{\sin 20}) = 2\cot 10(\frac{2\sin^2 10}{2\sin 10\cos 10})$$

$$= 2\frac{\cos 10}{\sin 10} \times \frac{\sin 10}{\cos 10} = 2$$

۱۲. گزینه‌ی (۳)

$$\alpha \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\cos 3\alpha + \sin\alpha\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha - \sin 2\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos(\alpha + 2\alpha) + \sin\alpha\sin 2\alpha}{\sin(\alpha + 2\alpha) - \sin 2\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos 2\alpha - \cancel{\sin\alpha\sin 2\alpha} + \cancel{\sin\alpha\sin 2\alpha}}{\sin\alpha\cos 2\alpha + \cancel{\sin 2\alpha\cos\alpha} - \cancel{\sin 2\alpha\cos\alpha}}$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha} = \cot\alpha$$

۱۳. گزینه‌ی (۳)

$$2\sin^2 x = 3\cos x$$

$$2(1 - \cos^2 x) = 3\cos x \Rightarrow 2 - 2\cos^2 x = 3\cos x$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

$$\cos x = A$$

$$2A^2 + 3A - 2 = 0 \quad \Delta = 9 - 4(2)(-2) = 25$$

$$A = \frac{-3 \pm 5}{4} \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$\cos x = -2$ غیرقابل قبول

۱۴. گزینه‌ی (۱)

$$\tan 60^\circ \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = m - 1$$

$$\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \sin x + \cos x = m - 1$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را در } \cos 60 \text{ ضرب می‌کنیم.}} \sin 60^\circ \sin x + \cos 60^\circ \cos x$$

$$= \cos 60^\circ (m-1) \Rightarrow \cos(\underbrace{x - \frac{\pi}{3}}_{A}) = \frac{1}{2}(m-1) = \frac{m-1}{2}$$

$$\Rightarrow -1 \le \cos A \le 1 \Rightarrow -1 \le \frac{m-1}{2} \le 1 \Rightarrow -2 \le m-1 \le 2$$

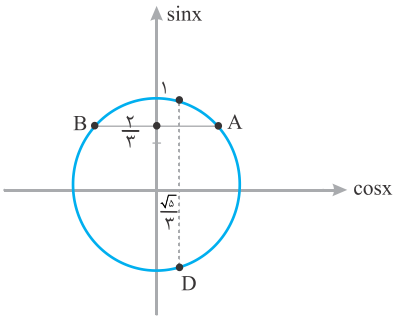
$$-1 \le m \le 3$$

۱۵. گزینه‌ی (۲)

$$(3\sin x - 2)(3\cos x - \sqrt{5}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 3\sin x - 2 = 0 \rightarrow \\ 3\cos x - \sqrt{5} = 0 \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} \sin x = \frac{2}{3} \\ \cos x = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

$$0 \le x \le \pi \Rightarrow$$



نقطه $\sin x = \frac{2}{3}$ را روی محور sinها پیدا می‌کنیم و خطی موازی با محور کسینوس‌ها می‌کشیم که آن، نقطه و دایره‌ی مثلثاتی را قطع کند، همانطور که می‌بینید نقاط A و B جواب‌های معادله $\sin x = \frac{2}{3}$ می‌باشند و به همین ترتیب نقاط D و C جواب‌های معادله‌ی $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ می‌باشند و چون جواب‌های در بازه‌ی $[0, \pi]$ از ما خواسته شده، A و B و C این جواب‌ها هستند.

۱۶. گزینه‌ی (۱)

$$\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \quad ①$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \underbrace{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x}_{1} = 2$$

$$1 + \sin 2x = 2 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{5\pi}{2} \\ 2x = \frac{+\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} & \text{ق ق} \\ x = \frac{\pi}{4} & \text{غ ق ق} \leftarrow \text{در معادله‌ی (۱) صدق نمی‌کند} \end{cases}$$

$$\sin^3 x + \cos^5 x = (\frac{-\sqrt{2}}{2})^3 + (\frac{-\sqrt{2}}{2})^5 = \frac{1}{2} \times \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{-3\sqrt{2}}{8}$$

۱۷. گزینه‌ی (۳)

$$\sin x = \frac{3}{5} \rightarrow \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$= 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} + 2x) = -\cot 2x \quad ①$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \cot^2 2x = \frac{1}{(\frac{24}{25})^2} = \frac{625}{576}$$

$$\Rightarrow \cot^2 2x = \frac{49}{576} \Rightarrow \cot^2 2x = \frac{7}{24}$$

مقدار به دست آمده را در رابطه‌ی ① می‌گذاریم:

$$-\cot 2x = -\frac{7}{24}$$

۱۸. گزینه‌ی (۳)

$$2\sin x + \sin^2 x + 5\sin^3 x = 8$$

معادله درجه سوم $2A + A^2 + 5A^3 = 8$ را با عددهی می‌توان حل کرد و به این نتیجه می‌رسیم که: $A = 1$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi]$$

۱۹. گزینه‌ی (۴)

با مرتب کردن رابطه‌ی زیر خواهیم داشت:

$$\sin 3x \cos 5x = 1 - \cos 3x \sin 5x$$

$$\sin 3x \cos 5x + \cos 3x \sin 5x = 1$$

$$\sin(3x + 5x) = 1 \Rightarrow \sin 8x = 1 \Rightarrow 8x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}$$

۲۰. گزینه‌ی (۴)

با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها در هر مثلث دلخواه مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

$$\text{فرض}: b^2 = a^2 + c^2 + ac$$

$$\Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \hat{B} = \frac{2\pi}{3}$$